۱۲- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید

الف) $L\{te^{-4t}\} = -\left(\frac{1}{s+4}\right)' = \frac{1}{(s+4)^2}$

ب) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 2 & 1 \le t < 3 \\ 4 & 3 \le t < 4 \\ -2 & t \ge 4 \end{cases}$

$f(t) = 1 + H(t-1) + 2H(t-3) - 6H(t-4)$

یا

$f(t) = 1 + u(t-1) + 2u(t-3) - 6u(t-4)$

$L\{f(t)\} = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-3s}}{s} - \frac{6e^{-4s}}{s}$

پ) $L\{x^2 \cos ax\} = (-1)^2 \left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)'' = \frac{2s^3 - 6a^2 s}{(s^2+a^2)^3}$

ت) $L\{e^{-2t} \sin 4t\} = \frac{4}{(s+2)^2+16}$ ← با استفاده از قضیه انتقال

اگر $L\{f(x)\} = F(s)$ آنگاه

$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$

ث) $L\{e^{4t} \cosh 5t\} = \frac{s-4}{(s-4)^2 - 25}$

ج) $L\{x^3 e^{2x}\} = (-1)^3 \left(\frac{1}{s-2}\right)''' = \frac{6}{(s-2)^4}$

چ) $L\{x \cos ax\} = (-1)^1 \left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = \frac{s^2 - a^2}{(s^2+a^2)^2}$

ج) $L\{x^2 e^{3x}\}$

تابع ذکر است که این مورد را می‌توان با دو روش بدست آورد

اول: قضیه انتقال $L\{f(x)\} = F(s) \Rightarrow L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$

$$L\{x^2\} = \frac{2}{s^3} \Rightarrow L\{e^{3x} f(x)\} = \frac{2}{(s-3)^2}$$

دوم: قضیه مشتق تبدیل لاپلاس $L\{f(x)\} = F(s) \Rightarrow L\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$

$$L\{e^{3x}\} = \frac{1}{s-3} \Rightarrow L\{x^2 e^{3x}\} = (-1)^2 \left(\frac{1}{s-3}\right)'' = \frac{2}{(s-3)^2}$$

خ) $L\{e^{t}\cos 5t\} = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+25}$

د) $L\{x e^{2x} \sin x\}$

روش اول:

$$L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1} \quad \& \quad L\{e^{2x}\sin x\} = \frac{1}{(s-2)^2+1}$$

$$L\{x e^{2x}\sin x\} = (-1)\left[\frac{1}{(s-2)^2+1}\right]' = -\frac{-2(s-2)}{\left[(s-2)^2+1\right]^2}$$

$$= \frac{2(s-2)}{\left[(s-2)^2+1\right]^2}$$

روش دوم

$$L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{x\sin x\} = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'$$

$$= \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L\{e^{2x} x \sin x\} = \frac{2(s-2)}{[(s-2)^2+1]^2}$$

$$\text{ن}) \; L\left\{\int_0^x \sin t \, dt\right\} = \frac{F(s)}{s} = \frac{\frac{1}{s^2+1}}{\frac{s}{1}} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$\text{ل}) \; L\left\{\int_0^x e^{-t} \sin t \, dt\right\} = \frac{F(s)}{s} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2+1}}{s}$$

$$= \frac{1}{s\left((s+1)^2+1\right)}$$

$$\text{ى}) \; L\left\{\int_0^x t \cos t \, dt\right\} = \frac{-\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'}{s}$$

$$= \frac{-\frac{(s^2+1)-2s^2}{(s^2+1)^2}}{s} = -\frac{\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2}}{\frac{s}{1}}$$

$$= -\frac{1-s^2}{s(s^2+1)^2}$$